

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД
- из физике -

Магнетна левитација

Ученик:
Милена Мићић IVд

Ментор:
Јовица Милисављевић

Београд, јун 2019.

Садржај

1	Увод	1
2	Теоријски увод	3
2.1	Ерншоова теорема	3
2.2	Изван Ерншоове теореме	4
3	Дијамагнетна левитација	7
3.1	Енергија и равнотежа	7
3.2	Стабилност	8
3.3	Стабилне зоне	10
3.4	Експеримент	12
4	Електромагнетна суспензија	15
4.1	Математички модел	16
4.2	ПИД контролер	18
4.3	Резултати	19
5	Закључак	21
	Литература	21

1

Увод

Магнетна левитација је начин за одржавање објеката у стабилној, не обавезно и статичкој, конфигурацији коришћењем искључиво магнетног поља. Магнетне силе се користе како би се супротставиле ефекту силе земљине тежине код класичне левитације, односно, ефектима других сила које би могле да изведу објекат из равнотеже.

Овај феномен био је врло интресантан физичарима, поготово након Ерншоовог открића 1842. године. Наиме, енглески математичар и физичар Самуел Ерншоу доказао је да електростатичка (касније је доказано да исто важи и за магнетостатичку) стабилна левитација није могућа у било којој конфигурацији наелектрисања и статичких магнета.

Ипак, већ неколико година након Ерншоове теореме, појавили су се алтернативни механизми магнетне левитације. Већ 1912. године, *Emile Bachelet* је патентирао први механизам електромагнетне суспензије који је назвао "*Levitating transmitting apparatus*". Његов циљ је био пренос поште и мањих пакета у вагону левитираном у магнетном пољу.

Убрзо након Ерншоове теореме и открића дијамагнетизма од стране М. Фарадеја 1846. године, Лорд Келвин је показао да је левитација дијамагнета могућа. Слично, користећи се открићем суперпроводника почетком 20. века, В.К. Аркадиев открио је левитацију суперпроводника.

Технологија која се најчешће помиње у конотацији са магнетном левитацијом, што се тиче шире публике, су брзи маглев возови. Иако њихов почетак досеже чак 1912. и *Bachelet*-а, може се рећи да тренутни механизам потиче од Вернера Кемпера, који је предложио коришћење контролера повратне спреге и привлачне магнетне силе. Након дугог периода рада над овом идејом, напоскон је еволуирала у Трансрапидни систем коришћен за маглев возове у Шангају, 2003. године.

Дизајн сличан претходно поменути брзим возовима искоришћен је у Нагоји за конструкцију спорих ”урбаних маглев-а”. Предности овакве врсте транспорта су не само тиха, безбедна и поуздана возња, већ и јефтина замена за тренутне облике транспорта, како су цене одржавања и коришћења веома мале.

У овом раду акценат је на опису дијамагнетне левитације и електромагнетне суспензије. Представљен је математички модел ових метода и описан експеримент.

2

Теоријски увод

Два кључна дела магнетне левитације су подизање левитираног објекта, што подразумева постојање подизајућих сила које се супротстављају гравитационој сили и стабилност левитираног објекта, што обезбеђује да неће доћи до спонтане промене конфигурације система у којој би подизајуће силе биле неутралисане.

Када је реч о магнетној левитацији, подизајуће силе су магнетне силе, а магнети који их генеришу могу бити стални, електромагнети, феромагнети, дијамагнети, суперпроводници као и магнетизам индукован струјом у калему.

2.1 Ерншоуова теорема

Самуел Ерншоу је био енглески математичар и физичар. У свом раду под називом "О природи молекуларних сила које регулишу састав етра", издатом 1842. године, радио је на једном од најизазовнијих питања свог времена.

Ерншоу је открио нешто једноставно али важно. Честице етра не могу да се нађу у стабилној равнотежи ако интерагују неком од сила које опадају са квадратом растојања ($1/r^2$). Најпознатије силе са овом особином су гравитациона, магнетна и електросатичка.

Ерншоуова теорема се ослања на особине потенцијалних енергија које опадају са растојањем. Лапласијан суме таквих енергија је нула, односно $\nabla^2 \sum k_i/r = 0$. Ово значи да када постоји равнотежа сила, тело и даље није у равнотежи јер не постоји локални минимум ове потенцијалне енергије. Тако да, уместо минимума у три димензије, потенцијална енергија је у облику седла. То значи да ако је равнотежа стабилна у једној димензији, нестабилна је у ортогоналној.

Теорема такође важи за било који број наелектрисања или магнета. У случају магнета, посматра се енергија U , магнетни дипол M и поље B :

$$U = -MB = -M_X B_X - M_Y B_Y - M_Z B_Z \quad (2.1)$$

Како је M константно, енергија U зависи само од компоненте B . Како у магнетостатичким пољима важи:

$$\nabla^2 B = 0 \quad (2.2)$$

Из (2.2) важи да је $\nabla^2 U = 0$, што значи да потенцијална енергија нема локални минимум.

2.2 Изван Ерншоове теореме

Ерншоова теорема не узима у обзир материјале који нису стални фиксни магнети. Феромагнети и парамагнети, као и диелектрици, поравнавају се са правцем магнетног поља и крећу се ка његовом максимуму. Како се максимум магнетног поља јавља само у извору, њихова левитација је у овом случају немогућа.

Дијамагнети се за разлику од њих крећу ка минимуму магнетног поља у коме се налазе. Како у овом случају локални минимум постоји, левитација дијамагнета је могућа.

Раније је показано да не постоји локални минимум ни за једну векторску компоненту магнетног поља. Са друге стране, локални минимум бројне вредности јачине поља може да постоји.

Као што је раније поменуто, неколико година након Ерншоове теореме, Лорд Келвин је теоријски показао да дијамагнетне супстанце могу да левитирају у магнетном пољу. У том случају енергија не зависи линеарно од јачине поља B већ од B^2 што може да има Лапласијан 0, односно:

$$\nabla^2 B^2 \geq 0 \quad (2.3)$$

Показује се да је кључна идеја свих до сада познатих левитационих шема у томе да енергија не зависи линеарно од компоненти вектора јачине поља, већ од њене бројне вредности.

Немачки научник Вернер Браунбек је 1939. године, изучавајући проблем статичке левитације, дошао до открића да се стабилна левитација може постићи само ако материјал левитираног објекта има $\epsilon < 1$ и $\mu < 1$. Где су ϵ и μ диелектрична пропустљивост и магнетна пермеабилност респективно.

Као специјални случај механизма по ком дијамагнети левитирају, 1947. године јавља се и суперпроводничка левитација, коју је открио руски физичар Владимир К. Аркадиев.

Једини преостали начин да се избегне Ерншоуова теорема, ако се изузме коришћење електромагнетне суспензије, јесте левитирање феромагнета који ротирају око своје осе. Ову појаву открио је и описао Рој Хариган 1983. године. Како се тело ротира, побија се Ерншоуова теорема и левитација је могућа. Комерцијални пример овог начина левитације је Левитрон.

3

Дијамагнетна левитација

Дијамагнетизам је особина материјала да формира супротно магнетно поље од оног коме је изложено. Магнетна пермеабилност дијамагнетних материјала је мања од релативне магнетне пермеабилности, због чега се и користе за левитирање. (као што је поменуто у области 2.1)

У наставку ће бити објашњено како дијамагнети левитирају, насупрот ономе што говори Ерншоуова теорема. Како би то урадили, најпре је потребно поставити формуле за енергију и равнотежу дијамагнета у магнетном и гравитационом пољу (3.1), као и одредити услове за стабилну равнотежу (3.2). Након тога, у области 3.3 биће описан експеримент који су извели Бери и Гејм.

3.1 Енергија и равнотежа

Нека посматрано спољашње магнетно поље долази од соленоида смештеног у $r = \{x, y, z\}$, где је јачина магнетног поља око њега $B(r)$. Објекат који је левитиран има масу M и запремину V и налази се у гравитационом пољу убрзања g . Магнетна сусцептибилност објекта је λ . Како је код дијамагнета $\lambda < 0$, а за сада посматрамо и парамагнете (где је $\lambda > 0$), мењамо значење ознаке λ тако да $\lambda = -|\lambda|$. У делу 3.2 биће објашњено зашто је левитација немогућа за случај $\lambda > 0$.

За објекте где је $|\lambda| \ll 1$ (који нас и интересују), важи следећа апроксимација за индуковани магнетни момент:

$$m(r) = -\frac{|\lambda|VB(r)}{\mu_0} \tag{3.1}$$

Где је μ_0 магнетна пермеабилност вакуума.

Бесконечно мали рад који се изврши у овом магнетном пољу је $-dmB$. Интеграцијом по пољу од 0 до $B(r)$ и убацијањем једначине 3.1. добија се магнетна енергија објекта у магнетном пољу B . Додавањем потенцијалне гравитационе енергије добија се укупна енергија објекта:

$$E(r) = mgz + \frac{|\lambda|V}{2\mu_0} B^2(r) \quad (3.2)$$

Како желимо да се објекат налази у равнотежи, укупна сила која делује на телу мора да буде 0:

$$F(r) = -\nabla E(r) = -mge_z - \frac{|\lambda|V}{\mu_0} B(r)\nabla B(r) = 0 \quad (3.3)$$

Где је e_z јединични вектор у правцу вертикале. Сматрамо да је геометрија соленоида таква да левитација објекта зависи само од његовог положаја у z -оси, односно сматрамо да су сва поља која утичу на тело ротационо симетрична у односу на z -осу. Узимајући то у обзир као и једначину 3.3 добијамо услов за равнотежу:

$$B(z)B'(z) = -\frac{\mu_0\rho g}{|\lambda|} \quad (3.4)$$

Видимо да услов за равнотежу зависи само од густине тела, односно ρ .

3.2 Стабилност

Да би објекат левитирао мора да буде у стабилној равнотежи, то јест мора да постоји сила која објекат враћа у равнотежни положај. Како би објекат био у стабилној равнотежи, енергија објекта мора да има минимум. За почетак, покажимо зашто левитирани објекат не може да буде парамагнет. Потребан услов за равнотежу објекта је:

$$\iint F(r)dS < 0 \quad (3.5)$$

Интеграција се врши по било којој малој затвореној површини блиској равнотежном положају. По Гаусовој теореме једначина 3.5 је еквивалентна $\nabla F(r) < 0$. Одавде и из једначине 3.3, узимајући да је $|\lambda|$ заправо $-\lambda$ (јер је реч о парамагнетима):

$$\nabla^2 B^2(r) < 0 \quad (3.6)$$

Како магнетни монополи не постоје важи $\nabla B = 0$, а кроз соленоид не тече струја, тј $\nabla \times B = 0$, компоненте B задовољавају Лапласову једначину и важи:

$$\begin{aligned}\nabla^2 B^2 &= \nabla^2(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\ &= 2[|\nabla B_x|^2 + |\nabla B_y|^2 + |\nabla B_z|^2 + B_x \nabla^2 B_x + B_y \nabla^2 B_y + B_z \nabla^2 B_z] \\ &= 2[|\nabla B_x|^2 + |\nabla B_y|^2 + |\nabla B_z|^2] \geq 0\end{aligned}\quad (3.7)$$

Једначина 3.7 је у супротности са потребним усовом за стабилну равнотежу, чиме је показано да левитација парамагнета није могућа.

Довољан услов да је објекат у стабилној равнотежи (3.5 је само потребан услов) је да енергија мора да с повећава у свим смеровима од равнотежног положаја који задовољава 3.4:

$$\partial_x^2 E(r) > 0 \quad \partial_y^2 E(r) > 0 \quad \partial_z^2 E(r) > 0 \quad (3.8)$$

Што значи да су довољни услови за стабилну равнотежу дијамагнета (из једначине 3.2):

$$\partial_z^2 B(z) > 0 \quad \partial_x^2 B(x) > 0 \quad (3.9)$$

При чему се прва неједнакост односи на вертикалну стабилну равнотежу, а друга на хоризонталну (узимајући у обзир да су услови за хоризонталну стабилност по обе осе еквивалентни због ротационе симетрије). Сада треба показати да се услов за стабилну равнотежу може изразити преко првог и другог извода B , односно B' и B'' .

Почињемо увођењем магнетног потенцијала $\Phi(r)$ за који важи:

$$B(r) = \nabla \Phi(r) \quad (3.10)$$

Уводимо и обележје за изводе потенцијала: $\Phi_n(z) \equiv \partial_z^n \Phi(0, 0, z)$.

Како магнетни потенцијал Φ задовољава Лапласову једначину и како је поље ротационо симетрично, важи:

$$\partial_x^2 \Phi(0, 0, z) = \partial_y^2 \Phi(0, 0, z) = -\frac{1}{2} \Phi_2(z) \quad (3.11)$$

Важно је написати Φ у близини осе, тако да $\Phi(r)$ развијамо до другог степена:

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= \Phi_0(z) + \frac{1}{2}(x^2 \partial_x^2 \Phi(0, 0, z) + y^2 \partial_y^2 \Phi(0, 0, z)) \\ &= \Phi_0(z) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \Phi_2(z)\end{aligned}\quad (3.12)$$

Из дефиниције магнетног потенцијала 3.10 и једначине 3.12, добија се јачина поља:

$$B^2(r) = \Phi_1^2(z) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)(\Phi_2^2(z) - 2\Phi_1(z)\Phi_3(z)) \quad (3.13)$$

Користећи претходне једначине, услови за стабилност дијамагнета 3.9 се могу написати помоћу $\Phi_n(z)$, а тиме и помоћу јачине поља и извода јачине поља по оси:

$$D_1 = B'(z)^2 + B(z)B''(z) > 0 \quad D_2 = B'(z)^2 - 2B(z)B''(z) > 0 \quad (3.14)$$

Где је први услов за вертикалну, а други за хоризонталну стабилност.

Одавде се може уочити да је математички разлог левитације дијамагнета, упркос Ерншоуовој теореме, тај да енергија зависи од јачине поља $B(r)$, која за разлику од њених компоненти не задовољава Лапласову једначину и тиме може да има минимум.

Такође, гледано са стране физике, дијамагнети не задовољавају Ерншоову теорему јер, као што се види у једначини 3.1, њихов диполни моменат зависи од јачине поља у ком се налазе.

3.3 Стабилне зоне

Јачина поља у соленоиду као и испод левитираног објекта монотono опада како z узима вредности од 0 до бесконачности. Постоји превојна тачка на некој висини z_i , односно важи $B''(z_i) = 0$. Из једначина 3.14 види се да су и D_1 и D_2 позитивни у тачки z_i . Такође лако се показује да D_1 има нулу у некој тачки $z_1 < z_i$, што значи да за тачку z у којој важи вертикална стабилност мора да буде $z > z_1$. Слично, D_2 има нулу у тачки $z_2 > z_i$ и хоризонтална стабилност у некој тачки z је задовољена за $z < z_2$. Овим смо пронашли стабилну зону ($z_1 < z < z_2$) у којој дијамагнет може да левитира.

Да би левитација била остварена, потребно је да услов за равнотежу 3.4 буде остварен, као и да објекат лежи у стабилној зони. Ово се може постићи променом струје у соленоиду која скалира јачину магнетног поља, али одржава геометрију функције поља и стабилне зоне остају исте.

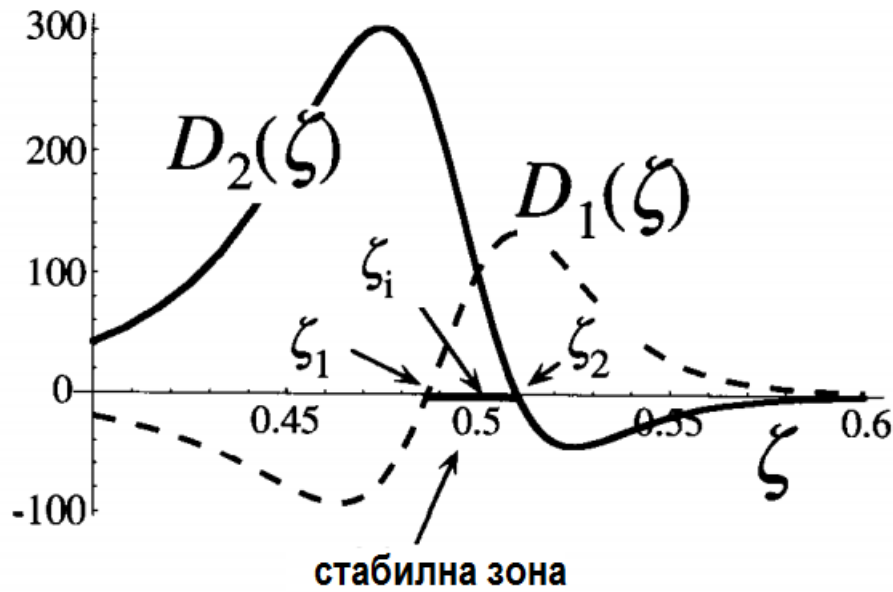
Посматрани модел соленоида има дужину L и полупречник r . Дефинисане су скалиране вредности:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad \delta = \frac{2a}{L}$$

Ако је B_0 јачина поља у тачки $z = 0$, увођењем нових скалираних променљивих дефинишемо поље:

$$\frac{B(\zeta, \delta)}{B_0} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \delta^2} \left(\frac{1 - 2\zeta}{\sqrt{(1 - 2\zeta)^2 + \delta^2}} + \frac{1 + 2\zeta}{\sqrt{(1 + 2\zeta)^2 + \delta^2}} \right) \quad (3.15)$$

Превојне тачке се налазе близу крајева соленоида ($\zeta = \pm 1/2$), али се по услову 3.4 левитација одржава само на $\zeta = \frac{1}{2}$ где је извод функције поља негативан.



Слика изнад приказује поље (где је $\delta = 0.1$) као и дискриминанте D_1 и D_2 . Могу се израчунати стабилне зоне у овом случају: $\zeta_1 = 0.487083 < \zeta < \zeta_2 = 0.510223$. Примећује се да је стабилна зона веома мала.

За "танке" соленоиде ($\delta \ll 1$ односно $a \ll L$) могу се увести одређене апроксимације. Сматрамо да је први члан у формули 3.15 нула, а други један ($\zeta = 1/2$). Превојна тачка и граничне тачке стабилне зоне изражене преко карактеристика соленоида су:

$$z_i = \frac{1}{2}L$$

$$z_1 = \frac{1}{2}L 0.258199a < z < z_2 = \frac{1}{2}L + 0.204124a \quad (3.16)$$

Слично, за широке соленоиде ($\delta \gg 1$ односно $a \gg L$) поједностављење је поново могуће, у овом случају апроксимацијом соленоида на струјни прстен кроз који протиче струја. Тада је јачина поља:

$$B = \frac{B_0}{\left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (3.17)$$

Користећи 3.15, добијамо превојну тачку и граничне тачке стабилне зоне изражене преко карактеристика соленоида:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}a = 0.378a < z < z_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}a = 0.6325a \quad (3.18)$$

3.4 Експеримент

У овом одељку описан је експеримент који су извели Бери и Гејм 1997. године. За похетак, користећи једначину 3.4, одређује се приближна вредност јачине магнетног поља потребног за успостављање левитације. Узимајући да је магнетна сусцептибилност воде $\lambda = -8.8 \cdot 10^{-6}$ и $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, производ јачине поља и његовог извода је:

$$B(z)B'(z) = -1400.9 \text{ T}^2 \text{ m}^{-1} \quad (3.19)$$

Као извор магнетног поља у експерименту коришћен је ”*Bitter*” магнет, који је заправо соленоид направљен од густо пакованих металних плоча кроз које наизменично пролази струја. Магнет континуално троши око 4 MW снаге, али је то снага која се у виду топлоте ослобађа на соленоиду а не на саму левитацију.

Мерењем поља које производи соленоид у експерименту показано је да постоји превојна тачка на $z_i = 78 \text{ mm}$, где је поље $B(z_i) = 0.63B_0$. Како је градијент поља у тачки z_i једнак $-8.15B_0 \text{ T m}^{-1}$, по једначини 3.19 може се израчунати потребна централна јачина поља:

$$B_0 = 16.5 \text{ T}. \quad (3.20)$$

Из једначине 3.14 могу се израчунати детерминанте D_1 и D_2 , тиме и стабилна зона: $z_1 = 67.5 \text{ mm} < z < z_2 = 87.5 \text{ mm}$.

Убацивани су различити дијамагнетни објекти и струја кроз солениод је мењана

док се није успоставила стабилна левитација. Одговарајуће поље B_0 је израчунато на приближно $16 T$ и тело је левитирало близу горњег краја соленоида, што је у складу са теоријским предвиђањем. Посматрањем лоптастог објекта полупречника $3 mm$ направљеног од пластике, уочено је да стабилно левитира у распону $(69 \pm 1) mm < z < (86 \pm 1) mm$, што је такође у складу са теоријским предвиђањем.

Индуковани магнетни момент m из једначине 3.1 може се посматрати као струја $I = |m|/S$, где је S површина контуре кроз коју протиче ова струја. За објекат пречника $10 mm$, која одговара малој жаби која је левитирана, струја износи $1.5 A$. Наравно, ова струја представља суму микро струја локализованих у атому, што значи да жива бића коришћена у експерименту није ударила струја.

4

Електромагнетна суспензија

Као што смо видели у претходним поглављима, Ерншоуова теорема не дозвољава стабилну левитацију парамагнета у константном магнетном и гравитационом пољу. Метода магнетне левитације која користи електромагнетну суспензију ослања се на чињеницу да се сталним мењањем напона на електромагнету мења и струја, а тиме и јачина магнетног поља, чиме је омогућена стабилна левитација. Повратна спрега (*feedback loop*) у електромагнетној суспензији, има улогу да на основу удаљености левитираног објекта од електромагнета, коју добијамо коришћењем сензора, врши корекцију на струју која му се предаје, и на тај начин одржава поменути висину на некој претходно одређеној.

Коришћењем електромагнета у електромагнетној суспензији ствара се поље које на тело утиче привлачно, силом супротном гравитационој сили. Алтернативно, могу се користити два електромагнета, где се један налази испод левитираног тела и на њега делује одбојно. Математички модел описан у наставку подразумева да је коришћен један електромагнет који се налази изнад левитираног тела.

Контролер чија је улога да регулише струју која се прослеђује електромагнету, најчешће је један од: *PID* (пропорционално-интегрално-диференцијални контролер) и *LQR* (линеарни квадратни регулатор). Како се чешће јавља у системима сличним оног који се описује, овом раду биће коришћен ПИД контролер.

Претходно поменути сензор који мери растојање левитираног објекта од електромагнета је најчешће ултразвучни или холов сензор. Ултразвучни сензор, као што и његово име предлаже, на основу времена протеклог између тренутка емисије и рецепције ултразвучних таласа, рачуна раздаљину од предмета. Са друге стране холов сензор, базиран на Холовом ефекту, мери магнитуду магнетног поља. Употребом једног или више оваквих сензора, може се измер-

ити јачина магнетног поља која долази од левитираног објекта и на основу тога одредити његово растојање. Како циљ овог рада није прављење физичке поставке оваквог система, неће се користити конкретно ни један од претходно наведена сензора, већ ће сензор бити моделован као део трансфер функције при опису математичког модела.

Циљ овог дела рада је пре свега поставити једначине математичког модела који одговара описаном систему левитације. Након тога, приказати резултате симулације рађене у *MATLAB Simulink*-у и упоредити понашање левитираног објекта у неконтролисаним условима као и када је коришћен поменути контролер.

4.1 Математички модел

Ради лакшег сналажења систем је подељен на два дела:

- 1) Механички систем
- 2) Електрични систем

Јачина привлачне магнетне силе када је магнет на растојању h и када кроз електромагнет тече струја i је:

$$f(h, i) = -\frac{i^2}{2} \frac{dL(h)}{dh} \quad (4.1)$$

Укупна индуктивност L као функција зависности од h :

$$L(h) = L_1 + \frac{L_0 H_0}{h} \quad (4.2)$$

Где су L_1 индуктивност електромагнета кад није у близини левитираног објекта, L_0 индуктивност електромагнета и левитираног објекта и H_0 равнотежни положај и они се одређују експериментално.

Користећи 4.2, добијамо:

$$f = \frac{L_0 H_0}{2} \left[\frac{i}{h} \right]^2 \quad (4.3)$$

Коришћењем Тејлоровог развоја, једначина силе f може се линеаризовати:

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial L_0} \right) \Delta L_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial H_0} \right) \Delta H_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial i} \right) \Delta i + \left(\frac{\partial f}{\partial h} \right) \Delta h \quad (4.4)$$

Како су L_0 и H_0 , функција f се може апроксимирати:

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial i} \right) \Delta i + \left(\frac{\partial f}{\partial h} \right) \Delta h \quad (4.5)$$

Где је f_0 сила која се супротставља сили земљине теже у равнотежном положају. Из једначина 4.3 и 4.5, добијамо једначину силе f :

$$f = \frac{L_0 H_0}{2} \left(\frac{I_0}{H_0} \right)^2 + \frac{L_0 I_0}{H_0} \Delta i - \frac{L_0 I_0}{H_0^2} \Delta h \quad (4.6)$$

При чему је I_0 струја која је потребна електромагнету да би тело било на висини H_0 (у равнотежном положају). Сила неопходна да би се тело враћало у равнотежни положај је $f_1 = f - f_0$. Дата је једначином:

$$f_1 = \frac{L_0 I_0}{H_0} \Delta i - \frac{L_0 I_0}{H_0^2} \Delta h \quad (4.7)$$

Овим је завршен опис механичког дела система. Како би се описао електрични део система, потребно је одредити напон који је потребан електромагнету:

$$V = iR + L(h) \frac{di}{dt} \quad (4.8)$$

Ако претпоставимо да се левитирани објекат налази у близини равнотежног положаја, као и да важи $L_1 \gg L_0$, из једначине 4.2 добије се $L(h) \approx L_1$. Тада важи:

$$V = iR + L_1 \frac{di}{dt} \quad (4.9)$$

Применом Лапласове трансформације, добија се:

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{L_1 s + R} \quad (4.10)$$

Сада, како би се поставио услов за равнотежу објекта, користи се Други Њутнов закон:

$$M \frac{d^2 h}{dt^2} = -f_1 \quad (4.11)$$

Применом Лапласове трансформације, добија се:

$$\frac{H(s)}{I(s)} = -\frac{K_1 I(s)}{Ms^2 - K_2} \quad (4.12)$$

Где су K_1 и K_2 дате једначинама:

$$K_1 = \frac{2\beta I_0}{H_0^2}, \quad K_2 = \frac{2\beta I_0^2}{H_0^3}$$

Где је $\beta = \frac{H_0 L_0}{2}$.

Као што је већ поменуто, овакав систем би морао да има сензор који мери висину левитираног објекта у сваком тренутку. Како би се добила крајња трансфер функција која се предаје контролеру, неопходно је и њега представити неким математичким моделом, у овом случају датим једначином 4.13.

$$V_s = K_s h \quad (4.13)$$

Овим се може добити трансфер функција система:

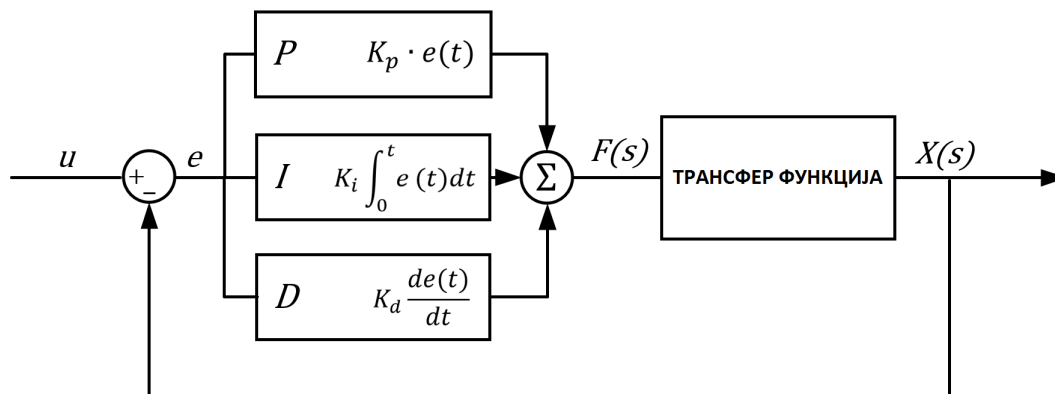
$$G(s) = \frac{V_s(s)}{V(s)} = \frac{-\frac{K_s K_1}{ML_1}}{\left(S + \frac{R}{L_1}\right)\left(S^2 - \frac{K_2}{M}\right)} \quad (4.14)$$

4.2 ПИД контролер

ПИД (пропорционално-интегрално-диференцијални контролер) који у виду петље рачуна грешку као разлику између референтне и праве вредности контролне величине и примењује корекцију на основу пропорционалних, интегралних и диференцијалних услова. Контролна величина у овом систему је висина левитираног објекта, односно, његово растојање од подлоге. Референтна вредност контролне величине је H_0 и она се одређује експериментално (зависи од осталих параметара у систему). Трансфер функција ПИД контролера дата је као:

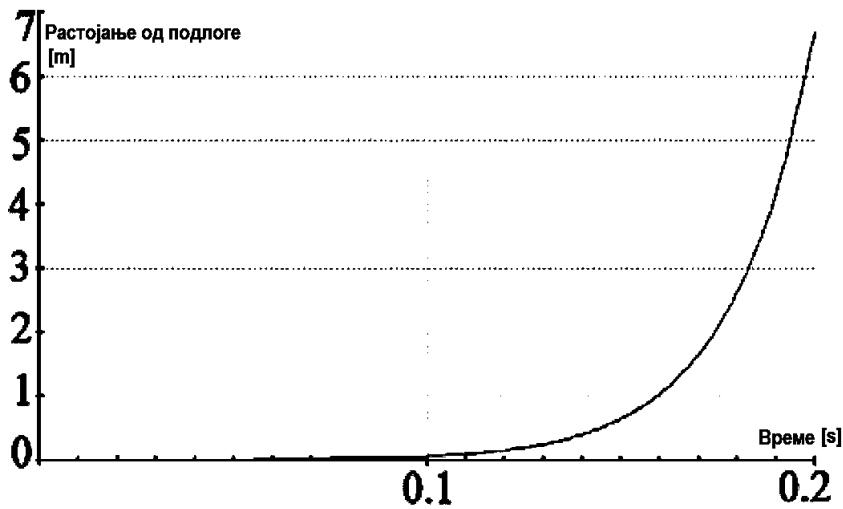
$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (4.15)$$

Где су K_p , K_i и K_d пропорционални, интегрални и диференцијални коефицијенти редом. Шема контролера приказана је на слици испод.



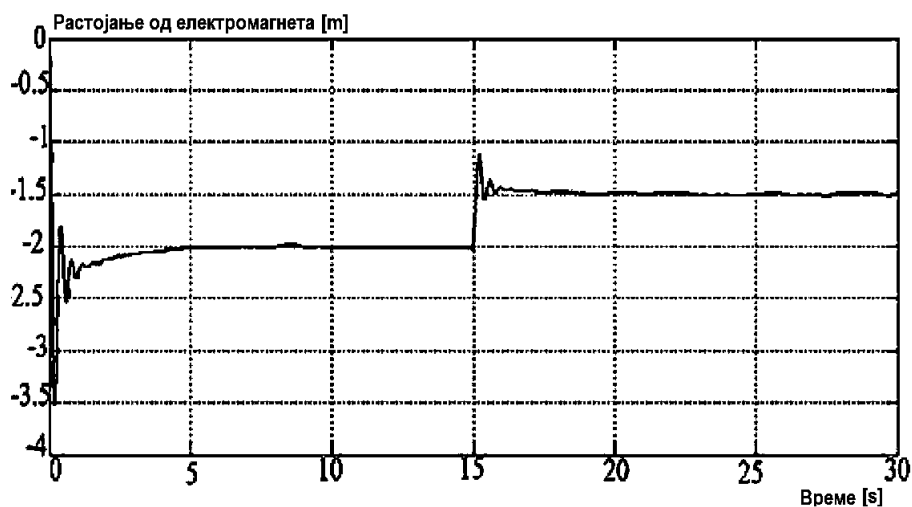
4.3 Резултати

Како би се на примеру показао контролер као што је *PID*, систем је приказан у два сценарија. Први сценарио је онај у коме контролер не постоји, односно левитирано тело је пуштено у простор са константном јачином магнетног поља. График зависности растојања левитираног тела од подлоге који ову ситуацију одређује приказан је на слици испод.



Примећује се да висина левитираног објекта експоненцијално расте, што значи да се ни у једном тренутку неће одржавати на константној висини. Другим речима, левитација није могућа.

Други сценарио се односи на онај у који је укључен контролер. График у том случају изгледа као на слици испод.



Може се приметити да се у овом случају, чак и при промени јачине поља, односно напона на електромагнету, постиже константна висина тела. Другим речима, левитација у смислу одржавања левитираног тела на константној висини је постигнута.

5

Закључак

Магнетна левитација је област о којој се прича не само у кругу физичара, већ и у широј јавности већ дуги низ година. Разлог за то је велики број примена у различитим областима које пружа. У овом раду представљене су две врсте магнетне левитације: дијамагнетна левитација и електромагнетна суспензија. Показано је да, насупрот ономе што говори Ерншоова теорема, магнетна левитација јесте могућа при одређеним условима.

Занимљиво је посматрати сличности и разлике између описаних врста левитације. Како су начини приступа врло различити, један је више теоријски а други више инжињерски, било ми је задовољство да се упустим у оба и из перспективе ове теме видим сличности и разлике у ове две гране науке.

Желела бих да се захвалим мом ментору Јовици Милисављевићу на сарадњи и подршци, не само у оквиру матурског рада већ и током протеклих неколико година. Такође бих се захвалила мојој професорки физике Наташи Чалуковић на пренетом знању и љубави према физици.

Литература

- [1] M. V. Berry, A. K. Geim, *Of flying frogs and levitrons*, University of Nijmegen, Нијмеген, Холандија, 1997.
- [2] M. D. Simon, L. O. Heflinger, *Diamagnetically stabilized magnet levitation*, University of California, Калифорнија, САД, 2001.
- [3] A. C. Unni, A. S. Junghare, *PID, fuzzy and LQR controllers for magnetic levitation system*, Amrita University, Амрита, Индија, 2016.
- [4] Hamid Yaghoubi, *The most important maglev applications*, Journal of Engineering, Иран, 2013.